

(2)

Appendix A: Components of the secular matrix for Navier-Stokes flow

□ In this appendix, we present the components of the matrix \underline{M} defined in equation (2.38):

$$F_1 = 2\mu_1 k^2 I_1(ka) - \frac{2 E k^2}{3 (-ikc) a} [-2ka I_0(ka) + I_1(ka)] ,$$

$$F_2 = \mu_1 (k^2 + k_1^2) I_1(k_1 a) - \frac{2 E k^2}{3 (-ikc) a} [-2k_1 a I_0(k_1 a) + I_1(k_1 a)] ,$$

$$F_3 = 2\mu_1 k^2 K_1(ka) - \frac{2 E k^2}{3 (-ikc) a} [2k_1 a K_0(ka) + K_1(ka)] ,$$

$$F_4 = \mu_1 (k^2 + k_1^2) K_1(k_1 a) - \frac{2 E k^2}{3 (-ikc) a} [2k_1 a K_0(k_1 a) + K_1(k_1 a)] ,$$

$$F_5 = -2\mu_2 k^2 I_1(ka) , \square$$

$$F_6 = -\mu_2 (k^2 + k_2^2) I_1(k_2 a) ,$$

$$F_7 = -2\mu_2 k^2 K_1(ka) , \square$$

$$F_8 = \mu_2 (k^2 + k_2^2) K_1(k_2 a) ;$$

$$G_1 = (-ikc) \rho_1 I_0(ka) + 2\mu_1 \frac{k}{a} [ka I_0(ka) - I_1(ka)] \\ + \frac{k}{(-ikc) a^2} [-\gamma_0 (1 - k^2 a^2) + \frac{4}{3} E] I_1(ka) - \frac{2 E}{3 (-ikc) a} k^2 I_0(ka) ,$$

$$G_2 = 2\mu_1 \frac{k}{a} [k_1 a I_0(k_1 a) - I_1(k_1 a)] \\ + \frac{k}{(-ikc) a^2} [-\gamma_0 (1 - k^2 a^2) + \frac{4}{3} E] I_1(k_1 a) - \frac{2 E}{3 (-ikc) a} k k_1 I_0(k_1 a) ,$$

$$G_3 = -(-ijkc) \rho_1 K_0(ka) - 2\mu_1 \frac{k}{a} [ka K_0(ka) + K_1(ka)] \\ + \frac{k}{(-ijkc) a^2} [-\gamma_0 (1-k^2 a^2) + \frac{4}{3} E] K_1(ka) + \frac{2}{3} \frac{E}{(-ijkc) a} k^2 K_0(ka),$$

$$G_4 = -2\mu_1 \frac{k}{a} [k_1 a K_0(k_1 a) + K_1(k_1 a)] \\ - \frac{k}{(-ijkc) a^2} [-\gamma_0 (1-k^2 a^2) + \frac{4}{3} E] K_1(k_1 a) + \frac{2}{3} \frac{E}{(-ijkc) a} k k_1 K_0(k_1 a),$$

$$G_5 = -(-ijkc) \rho_2 I_0(ka) - 2\mu_2 \frac{k}{a} [ka I_0(ka) - I_1(ka)],$$

$$G_6 = -2\mu_2 \frac{k}{a} [k_2 a I_0(k_2 a) - I_1(k_2 a)],$$

$$G_7 = (-ikc) \rho_2 K_0(ka) + 2\mu_2 \frac{k}{a} [k_2 a K_0(k_2 a) + K_1(k_2 a)],$$

$$G_8 = 2\mu_2 \frac{k}{a} [k_2 a K_0(k_2 a) + K_1(k_2 a)],$$



Appendix B: Components of the secular matrix for Stokes flow

In this appendix, we present the components of the matrices M defined in equation (3.4) and (3.8):

$$H_1 = \frac{1}{2} a [I_0(ka) + I_2(ka)], \quad \square$$

$$H_2 = -\frac{1}{2} a [K_0(ka) + K_2(ka)],$$

$$H_3 = -\frac{1}{2} a [I_0(ka) + I_2(ka)], \quad \square$$

$$H_4 = \frac{1}{2} a [K_0(ka) + K_2(ka)];$$

$$L_1 = I_0(ka) + ka I_1(ka), \quad \square$$

$$L_2 = -K_0(ka) + ka K_1(ka),$$

$$L_3 = -I_0(ka) - ka I_1(ka), \quad \square$$

$$L_4 = K_0(ka) - ka K_1(ka),$$

$$\hat{L}_1 = 2 I_0(ka) + ka I_1(ka), \quad \square$$

$$\hat{L}_2 = 2 K_0(ka) - ka K_1(ka),$$

$$\hat{L}_3 = -2 I_0(ka) - ka I_1(ka), \quad \square$$

$$\hat{L}_4 = -2 K_0(ka) + ka K_1(ka),$$

$$N_1 = \frac{1}{2} a_i [I_0(ka_i) + I_2(ka_i)], \quad \square$$

$$N_2 = -\frac{1}{2} a_i [K_0(ka_i) + K_2(ka_i)],$$

$$N_3 = I_0(ka_i) + ka_i I_1(ka_i), \quad \square$$

$$N_4 = -K_0(ka_i) + ka_i K_1(ka_i),$$

$$\hat{N}_3 = 2 I_0(ka_i) + ka_i I_1(ka_i), \quad \square$$

$$\hat{N}_4 = 2 K_0(ka_i) - ka_i K_1(ka_i),$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} a_e [I_0(ka_e) + I_2(ka_e)], \quad \square$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2} a_e [K_0(ka_e) + K_2(ka_e)],$$

$$Q_3 = I_0(ka_e) + ka_e I_1(ka_e), \quad \square$$

$$Q_4 = K_0(ka_e) - ka_e K_1(ka_e),$$

$$\hat{Q}_3 = 2 I_0(ka_e) + ka_e I_1(ka_e), \quad \square$$

$$\hat{Q}_4 = 2 K_0(ka_e) - ka_e K_1(ka_e),$$

$$S_1 = 2 \mu_1 k^2 I_1(ka) + \frac{2}{3} \frac{E k^2}{(-i k c) a} [2ka I_0(ka) - I_1(ka)]$$

$$S_2 = 2 \mu_1 k ka I_0(ka) + \frac{2}{3} \frac{E k}{(-i k c) a} [ka I_0(ka) + (1 + 2k^2 a^2) I_1(ka)]$$

$$\hat{S}_2 = \frac{1}{k} S_1 + S_2 = 2 \mu_1 k [I_1(ka) + ka I_0(ka)] + \frac{2}{3} \frac{E k^2}{(-i k c)} [3 I_0(ka) + 2 ka I_1(ka)]$$

$$S_3 = 2 \mu_1 k^2 K_1(ka) - \frac{2}{3} \frac{E k^2}{(-i k c) a} [2ka K_0(ka) + K_1(ka)]$$

$$S_4 = -2 \mu_1 k ka K_0(ka) + \frac{2}{3} \frac{E k}{(-i k c) a} [-ka K_0(ka) + (1 + 2k^2 a^2) K_1(ka)]$$

$$\hat{S}_4 = -\frac{1}{k} S_3 - S_4 = 2 \mu_1 k [ka K_0(ka) - K_1(ka)] - \frac{2}{3} \frac{E k^2}{(-i k c)} [-3 K_0(ka) + 2 ka K_1(ka)]$$

$$S_5 = -2 \mu_2 k^2 I_1(ka)$$

$$S_6 = -2 \mu_2 k ka I_0(ka)$$

$$S_7 = -2 \mu_2 k^2 K_1(ka)$$

$$S_8 = 2 \mu_2 k ka K_0(ka)$$

$$\hat{S}_6 = \frac{1}{k} S_5 + S_6 = -2 \mu_2 k [I_1(ka) + ka I_0(ka)]$$

$$\hat{S}_8 = -\frac{1}{k} S_7 - S_8 = -2 \mu_2 k [ka K_0(ka) - K_1(ka)]$$

$$T_1 = 2 \mu_1 \frac{k}{a} [ka I_0(ka) - I_1(ka)]$$

$$+ \frac{k}{(-i k c) a^2} [-\gamma_0 (1 - k^2 a^2) + \frac{4}{3} E] I_1(ka) - \frac{2}{3} \frac{E}{(-i k c) a} k^2 I_0(ka)$$

$$T_2 = 2 \mu_1 \frac{1}{a} [-ka I_0(ka) + (1+k^2a^2) I_1(ka)] \\ + \frac{1}{(-ijk)a^2} [-\gamma_0 (1-k^2a^2) + \frac{4}{3} E] [ka I_0(ka) - I_1(ka)] - \frac{2}{3} \frac{E k}{(-ijk)a} [I_0(ka) + ka I_1(ka)]$$

$$\hat{T}_2 = \frac{1}{k} T_1 + T_2 = 2\mu_1 k ka I_1(ka) \\ + \frac{k}{(-ijk)a} [-\gamma_0 (1-k^2a^2) + \frac{4}{3} E] I_0(ka) - \frac{2}{3} \frac{E k}{(-ijk)a} [2 I_0(ka) + ka I_1(ka)] ,$$

$$T_3 = -2 \mu_1 \frac{k}{a} [ka K_0(ka) + K_1(ka)] \\ + \frac{k}{(-ijk)a^2} [-\gamma_0 (1-k^2a^2) + \frac{4}{3} E] K_1(ka) + \frac{2}{3} \frac{E k^2}{(-ijk)a} K_0(ka) ,$$

$$T_4 = 2 \mu_1 \frac{1}{a} [ka K_0(ka) + (1+k^2a^2) K_1(ka)] \\ - \frac{1}{(-ijk)a^2} [-\gamma_0 (1-k^2a^2) + \frac{4}{3} E] [ka K_0(ka) + K_1(ka)] + \frac{2}{3} \frac{E k}{(-ijk)a} [K_0(ka) - ka K_1(ka)] ,$$

$$\hat{T}_4 = -\frac{1}{k} T_3 - T_4 = -2\mu_1 k ka K_1(ka) \\ + \frac{k}{(-ijk)a} [-\gamma_0 (1-k^2a^2) + \frac{4}{3} E] K_0(ka) - \frac{2}{3} \frac{E k}{(-ijk)a} [2K_0(ka) - ka K_1(ka)] ,$$

$$T_5 = -2 \frac{\mu_2}{a^2} ka [ka I_0(ka) - I_1(ka)] , \quad \square$$

$$T_6 = -2 \mu_2 \frac{1}{a} [-ka I_0(ka) + (1+k^2a^2) I_1(ka)] , \quad \square \quad \hat{T}_6 = \frac{1}{k} T_5 + T_6 = -2 \mu_2 k ka I_1(ka) ,$$

$$T_7 = 2 \frac{\mu_2}{a^2} ka [ka K_0(ka) + K_1(ka)] ,$$

$$T_8 = -2 \mu_2 \frac{1}{a} [ka K_0(ka) + (1+k^2a^2) K_1(ka)] , \quad \square \quad \hat{T}_8 = 2 \mu_2 k ka K_1(ka) .$$