

Appendix to “Effect of surfactants on the inertialess instability of a two-layer film flow”

By **P. Gao & X.-Y. Lu**

Journal of Fluid Mechanics, vol. 591 (2007), pp. 495–507

This material has not been copy-edited or typeset by Cambridge University Press: its format is entirely the responsibility of the author.

Formulations of the quartic equation

The quartic equation for the phase velocity, i.e. c , can be given as

$$A_4 c^4 + A_3 c^3 + A_2 c^2 + A_1 c + A_0 = 0,$$

where A_i ($i = 0 \dots 4$) are the coefficients and can be expressed as follows:

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ km & 0 & 0 & m & -k \\ 2imk^2 S_{k\delta} & 2imk^2 C_{k\delta} & 2imk^2 \delta S_{k\delta} & 2imk^2 \delta C_{k\delta} & 0 \\ 2k^2 C_{k\delta} & 2k^2 S_{k\delta} & 2k^2 \delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2 \delta S_{k\delta} & 0 \\ C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & 0 \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -1 & 0 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & \frac{ikMa_1}{mCa_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_s & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & \delta & 0 & U_i \end{vmatrix};$$

$$A_1 = - \sum_{j=1}^4 A_1^{(j)},$$

$$A_1^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & & \\
0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
km & 0 & 0 & m & -k & & & & & \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & & \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
-S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & 0 & & & & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-k & -1 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{iMa_1}{mCa_1} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & U_i & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & & & & \\
k & 1 & 0 & \delta & 0 & U_i & & & &
\end{array} \right),$$

$$A_1^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & & \\
0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
km & 0 & 0 & m & -k & & & & & \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & & \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & & \\
C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & & & & & \\
kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
\hline
-S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & 0 & & & & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-k & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} & & & & \\
0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & \frac{iMa_1}{mCa_1} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & U_s & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & & & & \\
k & 1 & 0 & 0 & 0 & U_i & & & &
\end{array} \right),$$

$$A_1^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & \\ km & 0 & 0 & m & -k & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & \\ C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & 0 \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -1 & 0 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & \delta & U_i \end{array} \right),$$

$$A_1^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & \\ km & 0 & 0 & m & -k & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & \\ C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & 0 \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & 0 \\ -k & -1 & 0 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & \frac{iMa_1}{mCa_1} \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_s \end{array} \right);$$

$$A_2 = 2 \sum_{j=1}^6 A_2^{(j)},$$

$$A_2^{(1)} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & \\ km & 0 & 0 & m & -k & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & \\ kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & \\ -k & -1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ikMa_1}{mCa_1} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & \\ k & 1 & 0 & 0 & U_i & \end{array} \right),$$

$$A_2^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & \\ km & 0 & 0 & m & -k & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & \\ -k & -1 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & U_i & 0 & \\ k & 1 & 0 & \delta & U_i & \end{array} \right),$$

$$A_2^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & \\
0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & \\
km & 0 & 0 & m & -k & & & & \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & & & & \\
\hline
-S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & & & & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & & & & \\
-k & -1 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & 0 & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{iMa_1}{mCa_1} & & & & \\
0 & 0 & 0 & U_i & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & U_s & & & &
\end{array} \right),$$

$$A_2^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & \\
0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\
0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & \\
km & 0 & 0 & m & -k & & & & \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\
C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
-S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & & & & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & & & & \\
-k & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & & & & \\
0 & 0 & 0 & U_s & 0 & & & & \\
k & 1 & 0 & 0 & U_i & & & &
\end{array} \right),$$

$$A_2^{(5)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & \\ km & 0 & 0 & m & -k & & & & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\ C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\ kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 & & & & \\ \hline -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & & & & \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & & & & \\ -k & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & \frac{iM a_1}{mCa_1} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_s & & & & \end{array} \right),$$

$$A_2^{(6)} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & & & & \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & & & & \\ km & 0 & 0 & m & -k & & & & \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & & & & \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\ C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline -S_k & -C_k & S_k & 0 & 0 & & & & \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & 0 & & & & \\ -k & -1 & 0 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & U_s & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_i & & & & \end{array} \right);$$

$$A_3 = -\sum_{j=1}^4 A_3^{(j)},$$

$$A_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ km & 0 & 0 & m & -k \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -S_k & -C_k & S_k & 0 \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 \\ -k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{iMa_2}{2Ca_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & U_i \end{pmatrix},$$

$$A_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ km & 0 & 0 & m & -k \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 \\ kS_{k\delta} & kC_{k\delta} & C_{k\delta} + k\delta S_{k\delta} & k\delta C_{k\delta} + S_{k\delta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -S_k & -C_k & S_k & 0 \\ kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 \\ -k & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{ikMa_1}{mCa_1} \\ 0 & 0 & 0 & U_s \end{pmatrix},$$

$$A_3^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k \\ 0 & k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ km & 0 & 0 & m & -k \\ 2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 \\ 2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc|c}
-S_k & -C_k & S_k & 0 & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & \\
-k & -1 & 0 & \frac{\delta}{m} - \delta & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & -\frac{ik}{2Ca_2} & \\
0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & U_i &
\end{array} \\
\\
A_3^{(4)} = \begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_k & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -kS_k & \\
0 & k & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \\
0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
km & 0 & 0 & 0 & m & -k & \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 0 & \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 0 & \\
C_{k\delta} & S_{k\delta} & \delta C_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & \delta S_{k\delta} & 0 &
\end{array} \\
\\
\begin{array}{cccc|c}
-S_k & -C_k & S_k & 0 & \\
kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & 0 & \\
-k & -1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & -\cot\theta - \frac{k^2}{Ca_1} & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & \\
0 & 0 & 0 & U_s &
\end{array} ;
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{c}
A_4 = \begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & k & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m & 0 & 0 & 0 \\
km & 0 & 0 & 0 & m \\
2imk^2S_{k\delta} & 2imk^2C_{k\delta} & 2imk^2\delta S_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} & 2imk^2\delta C_{k\delta} \\
2k^2C_{k\delta} & 2k^2S_{k\delta} & 2k^2\delta C_{k\delta} + 2kS_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta} & 2kC_{k\delta} + 2k^2\delta S_{k\delta}
\end{array} \\
\\
\begin{array}{cccc|c}
C_k & -S_k & -C_k & S_k & \\
-kS_k & kC_k & C_k + kS_k & -kC_k - S_k & \\
0 & -k & -1 & 0 & \\
-1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 0 & \\
-k & 0 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array} .
\end{array}$$