CALCULS DE FACTEURS EPSILON DE PAIRES POUR GL_n SUR UN CORPS LOCAL, I

COLIN J. BUSHNELL AND GUY HENNIART

Résumé

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien et ψ un caractère additif non trivial de F. Soient σ une représentation du groupe de Weil–Deligne de F, et $\check{\sigma}$ sa contragrédiente. Nous calculons le facteur $\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \frac{1}{2})$. De manière analogue, nous calculons le facteur $\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \frac{1}{2})$ pour toute représentation admissible irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$. En conséquence, si F est de caractéristique nulle et si σ et π se correspondent par la correspondance de Langlands construite par M. Harris, ou celle construite par les auteurs, alors les facteurs $\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, s)$ et $\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, s)$ sont égaux pour tout nombre complexe s.

Abstract

Let F be a non-Archimedean local field and ψ a non-trivial additive character of F. Let σ be a representation of the Weil–Deligne group of F and $\check{\sigma}$ its contragredient representation. We compute $\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \frac{1}{2})$. Analogously, we compute $\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \frac{1}{2})$ for all irreducible admissible representations π of $\mathrm{GL}_n(F)$. Consequently, if F has characteristic zero, and σ, π correspond via the Langlands correspondence established by M. Harris or the correspondence constructed by the authors, then we have $\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, s) = \varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, s)$ for all $s \in \mathbb{C}$.

1. *Introduction*

1.1. Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien; notons p sa caractéristique résiduelle et q le cardinal de son corps résiduel. Fixons une clôture algébrique séparable $\overline{F}$ de F et un caractère additif non trivial ψ de F; notons $n(\psi)$ le plus grand entier k tel que ψ soit trivial sur $\mathfrak{p}_F^{-k}$, $\mathfrak{p}_F$ désignant l'idéal maximal de l'anneau d'entiers $\mathfrak{o}_F$ de F. Enfin, notons $\mathcal{W}_F$ le groupe de Weil de $\overline{F}$ sur F, et $\mathcal{W}'_F$ le groupe de Weil–Deligne.

Soient n un entier, $n \geqslant 1$, et σ une représentation Φ-semisimple de degré n de $\mathcal{W}'_F$. Une telle représentation possède un déterminant $\det \sigma$ qui, par la théorie locale du corps de classes, normalisée de sorte que les substitutions de Frobenius *géométriques* correspondent aux uniformisantes de F, peut se voir comme un quasicaractère du groupe multiplicatif $F^\times$. Nous prouvons la formule suivante (Théorème 1):

$$\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \det \sigma(-1)^{n-1}.$$

De manière analogue, soit π une représentation admissible irréductible du groupe localement profini $\mathrm{GL}_n(F)$, et soit ω_π son quasicaractère central. Nous prouvons (Théorème 2) l'égalité

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \omega_\pi(-1)^{n-1},$$

où le facteur epsilon est celui défini dans [**10**] (voir aussi [**14**, **15**]).

Received 18 February 1998; revised 3 August 1998.

1991 *Mathematics Subject Classification* 22E50.

Ce travail a été en partie subventionné par le réseau européen TMR 'Arithmetical Algebraic Geometry'.

1.2. Les résultats précédents prennent leur sens dans le cadre des conjectures de Langlands [**12**, **8**, **11**]. Notons $\mathcal{G}_F(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations Φ-semisimples de degré n de $\mathcal{W}'_F$, et $\mathcal{G}^0_F(n)$ le sous-ensemble formé des représentations irréductibles de $\mathcal{W}_F$; symétriquement, notons $\mathcal{A}_F(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$, et $\mathcal{A}^0_F(n)$ le sous-ensemble formé des représentations supercuspidales. On conjecture l'existence pour chaque entier $n \geqslant 1$ d'une bijection $\sigma \mapsto \boldsymbol{\pi}(\sigma)$, $\mathcal{G}_F(n) \to \mathcal{A}_F(n)$, se restreignant en une bijection de $\mathcal{G}^0_F(n)$ sur $\mathcal{A}^0_F(n)$, de sorte que les propriétés suivantes soient vérifiées.

(1) *Pour n entier, $n \geqslant 1$, et $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, on a*

$$\boldsymbol{\pi}(\check{\sigma}) = \boldsymbol{\pi}(\sigma)^\vee \quad \textit{et} \quad \det \sigma = \omega_{\boldsymbol{\pi}(\sigma)}.$$

(2) *Pour n et n' entiers $\geqslant 1$ et $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$, $\sigma' \in \mathcal{G}_F(n')$, on a*

$$(2L) \qquad L(\sigma \otimes \sigma', s) = L(\boldsymbol{\pi}(\sigma) \times \boldsymbol{\pi}(\sigma'), s),$$

$$(2\varepsilon) \qquad \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s) = \varepsilon(\boldsymbol{\pi}(\sigma) \times \boldsymbol{\pi}(\sigma'), \psi, s).$$

En fait si des bijections $\mathcal{G}^0_F(n) \to \mathcal{A}^0_F(n)$ sont données, pour tout $n \geqslant 1$, qui vérifient (1) et (2) alors on sait [**4**, 3.9] les étendre en des bijections $\mathcal{G}_F(n) \to \mathcal{A}_F(n)$ vérifiant encore (1) et (2), grâce à la classification de Zelevinski [**17**, **10**].

1.3. Si la caractéristique de F n'est pas nulle, de telles bijections de $\mathcal{G}^0_F(n)$ sur $\mathcal{A}^0_F(n)$ ont été construites par Laumon, Rapoport et Stuhler [**13**].

Supposons que la caractéristique de F soit nulle. On dispose alors de bijections de $\mathcal{G}^0_F(n)$ sur $\mathcal{A}^0_F(n)$ construites par M. Harris [**7**] (voir aussi [**4**]). Pour ces bijections les propriétés (1) et (2L) plus haut sont vraies [**7**], mais la propriété (2ε) n'est établie que si n et n' sont premiers à p [**8**]. Seule une version faible (2a) de (2ε) a pu être établie pour n et n' quelconques: soient $\sigma \in \mathcal{G}^0_F(n)$ et $\sigma' \in \mathcal{G}^0_F(n')$ correspondant respectivement à $\pi \in \mathcal{A}^0_F(n)$ et $\pi' \in \mathcal{A}^0_F(n')$; notons $a(\sigma \otimes \sigma')$ et $a(\pi \times \pi')$ les exposants définis par

$$\varepsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s{+}t) = \varepsilon(\sigma \otimes \sigma', \psi, s)\, q^{-t(a(\sigma\otimes\sigma') + nn'n(\psi))}$$

et

$$\varepsilon(\pi \times \pi', \psi, s{+}t) = \varepsilon(\pi \times \pi', \psi, s)\, q^{-t(a(\pi\times\pi') + nn'n(\psi))}$$

pour $s, t \in \mathbb{C}$. Ces exposants sont des entiers ne dépendant pas de ψ et, grâce aux formules explicites de [**3**], on a [**4**]

$$(2a) \qquad a(\sigma \otimes \sigma') = a(\pi \times \pi').$$

En particulier, on voit que pour prouver l'égalité (2ε) dans cette situation, il suffit de la prouver pour une seule valeur de s, par exemple $s = \frac{1}{2}$.

1.4. L'intérêt des Théorèmes 1 et 2 est qu'ils donnent (par la valeur en $s = \frac{1}{2}$) l'égalité (2ε) dans le cas extrême, et *a priori* le plus difficile, où $\sigma' \cong \check{\sigma}$: les facteurs L de (2L) sont alors toujours non triviaux, et les formules pour les facteurs epsilon en sont compliquées.

1.5. Supposons toujours que la caractéristique de F soit nulle, et supposons de plus que n soit une puissance de p. Les auteurs ont construit en ce cas des bijections [**2**] de $\mathcal{G}_F^0(n)$ sur $\mathcal{A}_F^0(n)$, qui diffèrent des précédentes au plus par torsion par des caractères non ramifiés de $F^\times$. Pour ces bijections, les propriétés (1) et ($2L$) tiennent toujours (pour n, n' des puissances de p) ainsi que la préservation des exposants ($2a$) [**4**]. De plus la propriété (2ε) est vraie quand n ou n' vaut 1 [**2**, Theorem 2.3]. Le présent article établit (2ε) pour ces bijections, quand $\sigma' = \check{\sigma}$.

1.6. Les formules pour $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$ et $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$ se prouvent par deux méthodes qui n'ont aucun lien l'une avec l'autre. Commençons par examiner le cas de $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$. On remarque que la représentation $\sigma \otimes \check{\sigma}$ de $\mathcal{W}'_F$ est orthogonale. On peut alors utiliser les résultats de Deligne [**5**], d'abord pour se ramener au cas où σ est une représentation de $\mathcal{W}_F$, puis pour calculer $\varepsilon(\sigma\otimes\check{\sigma}, \psi, \frac{1}{2})$, en ce cas, comme la deuxième classe de Stiefel–Whitney de la représentation orthogonale $\sigma\otimes\check{\sigma}$. On remarque alors que cette classe ne dépend que de $\det\sigma$ et on la calcule, à déterminant fixé, en choisissant σ somme de quasicaractères.

1.7. Traitons ensuite du cas $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$. Grâce aux propriétés des facteurs ε relatives à la classification de Langlands [**10**], on se ramène au cas où π est supercuspidale, et en particulier générique. Pour π générique, on peut utiliser directement la définition de [**10**]. Cette définition fait intervenir des fonctions zêta définies par des intégrales. Nous utilisons l'équation fonctionnelle de ces fonctions zêta, où apparaît le facteur $\omega_\pi(-1)^{n-1}$, et des arguments de positivité des coefficients de ces fonctions, vues comme séries formelles en q^{-s}, où q est le cardinal du corps résiduel de F.

2. *Cas d'une représentation du groupe de Weil–Deligne*

2.1. Nous prouvons le suivant.

THÉORÈME 1. *Soit $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$. On a*

$$\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \det\sigma(-1)^{n-1}.$$

Soit $\sigma \in \mathcal{G}_F(n)$. Notons W l'espace de la représentation σ. Alors $\sigma \otimes \check{\sigma}$ agit sur $W \otimes W^\vee$, où $W^\vee$ est l'espace dual de W. Plus précisément écrivons $\sigma = (\sigma_1, N)$, où σ_1 est une représentation semisimple de $\mathcal{W}_F$ sur l'espace W et N un élément nilpotent de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ vérifiant

$$\sigma_1(g)N\sigma_1(g)^{-1} = \|g\|N,$$

pour $g \in \mathcal{W}_F$ [**16**, 4.1.2]. Alors $\sigma \otimes \check{\sigma}$ est le couple $(\sigma_1 \otimes \check{\sigma}_1, N \otimes 1 - 1 \otimes {}^tN)$ agissant sur $W \otimes W^\vee$. On vérifie aussitôt que $\sigma \otimes \check{\sigma}$ laisse invariante la forme quadratique non dégénérée $\boldsymbol{q} : W \otimes W^\vee \to \mathbb{C}$, $w \otimes \lambda \mapsto \lambda(w)$: on a $\sigma_1 \otimes \check{\sigma}_1(g) \in \mathrm{SO}(\boldsymbol{q})$ pour $g \in \mathcal{W}_F$ et $N \otimes 1 - 1 \otimes {}^tN$ appartient à l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}(\boldsymbol{q})$. D'après [**5**, p. 315 et en particulier Lemme 5.6], on a

$$\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \varepsilon(\sigma_1 \otimes \check{\sigma}_1, \psi, \tfrac{1}{2}).$$

On est donc ramené au cas où σ est une représentation de $\mathcal{W}_F$.

Notons **1** la classe de la représentation triviale (de dimension 1) de $\mathcal{W}_F$. La représentation virtuelle $\rho = \sigma \otimes \check{\sigma} - n^2\mathbf{1}$ est orthogonale, de dimension 0 et de déterminant trivial. On a

$$\varepsilon(\rho, \psi, \tfrac{1}{2}) = \varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, \tfrac{1}{2}).$$

D'après [**5**, Proposition 5.2], $\varepsilon(\rho, \psi, \frac{1}{2})$ vaut 1 ou -1 selon que la classe de Stiefel–Whitney $w^2(\rho) \in H^2(\mathcal{W}_F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est triviale ou non. Si F est de caractéristique 2, on a donc $\varepsilon(\rho, \psi, \frac{1}{2}) = 1 = \det \sigma(-1)$. Nous supposons désormais, jusqu'à la fin du 2.3, que F n'est pas de caractéristique 2. Si on identifie $H^2(\mathcal{W}_F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ à $\{\pm 1\}$, on peut écrire $\varepsilon(\rho, \psi, \frac{1}{2}) = w^2(\rho)$. Comme on a $\sigma \otimes \check{\sigma} = \rho \oplus n^2\mathbf{1}$, on obtient aussitôt, par multiplicativité des classes de Stiefel–Whitney totales,

$$w^2(\sigma \otimes \check{\sigma}) = w^2(\rho).$$

Il s'agit donc de prouver l'identité $w^2(\sigma \otimes \check{\sigma}) = \det \sigma(-1)^{n-1}$.

2.2. Supposons d'abord que la représentation σ de $\mathcal{W}_F$ est *d'image finie*, donc unitaire, $\sigma : \mathcal{W}_F \to \mathrm{U}(W)$.

Pour une représentation orthogonale réelle, d'image finie et de déterminant trivial $\tau : \mathcal{W}_F \to \mathrm{SO}(\boldsymbol{q})$, la classe $w^2(\tau)$ s'obtient en considérant le revêtement à deux feuillets $\mathrm{Spin}(\boldsymbol{q})$ de $\mathrm{SO}(\boldsymbol{q})$, ce qui donne une classe $c_{\boldsymbol{q}}$ dans $H^2(\mathrm{SO}(\boldsymbol{q}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, qui par τ donne $w^2(\tau)$ dans $H^2(\mathcal{W}_F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Il nous faut identifier $\sigma \otimes \check{\sigma}$ à une telle représentation τ. La représentation $\iota : g \mapsto g \otimes {}^t g^{-1}$ du groupe compact $\mathrm{U}(W)$ sur $W \otimes W^\vee$ est continue et orthogonale donc réelle: il existe une $\mathbb{R}$-structure V sur $W \otimes W^\vee$ et une forme quadratique non dégénérée $\boldsymbol{q}$ sur V de sorte que $\sigma \otimes \check{\sigma}$ se factorise de la façon suivante:

$$\mathcal{W}_F \xrightarrow{\sigma} \mathrm{U}(W) \xrightarrow{\iota_1} \mathrm{SO}(\boldsymbol{q}) \xrightarrow{\iota_2} \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(V) \xrightarrow{\iota_3} \mathrm{GL}(W \otimes W^\vee),$$

où ι_2, ι_3 sont les inclusions canoniques. On peut prendre $\tau = \iota_1 \circ \tau$.

La classe $c_{\boldsymbol{q}}$ donne un élément c_W de $H^2(\mathrm{U}(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Considérons alors la suite exacte de groupes topologiques

$$1 \longrightarrow \mathrm{SU}(W) \longrightarrow \mathrm{U}(W) \xrightarrow{\det} \mathrm{U}(1) \longrightarrow 1$$

et la suite exacte de cohomologie (d'inflation-restriction) associée

$$0 \longrightarrow H^2(\mathrm{U}(1), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathrm{U}(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{res}} H^2(\mathrm{SU}(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

(On a $H^1(\mathrm{SU}(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$, puisque $\mathrm{SU}(W)$ est son propre groupe des commutateurs.) L'élément $c_{\boldsymbol{q}}$ de $H^2(\mathrm{SO}(\boldsymbol{q}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ correspond à un revêtement topologique, et c_W et son image $\mathrm{res}\, c_W$ dans $H^2(\mathrm{SU}(W), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ correspondent aux revêtements topologiques induits de $\mathrm{U}(W)$ et $\mathrm{SU}(W)$. Mais $\mathrm{SU}(W)$ est simplement connexe donc $\mathrm{res}\, c_W$ est trivial. Par la suite d'inflation restriction écrite plus haut, on voit que $w^2(\sigma \otimes \check{\sigma})$ ne dépend que du déterminant χ de σ. Prenant alors $\sigma = \chi \oplus (n-1)\mathbf{1}$, on obtient

$$\sigma \otimes \check{\sigma} = (n-1)(\chi \oplus \chi^{-1}) \oplus (n^2 - 2n + 2)\mathbf{1}$$

d'où $w^2(\sigma \otimes \check{\sigma}) = w^2(\chi \oplus \chi^{-1})^{n-1}$. Mais [**5**, p. 314] on a $w^2(\chi \oplus \chi^{-1}) = \chi(-1)$ ce qui donne le résultat dans le cas où σ est unitaire d'image finie.

2.3. Supposons que la représentation σ de $\mathcal{W}_F$ est irréductible. Donc il existe un quasicaractère non ramifié χ de $\mathcal{W}_F$ tel que $\sigma = \sigma' \otimes \chi$, où σ' est unitaire d'image finie. La torsion par un quasicaractère non ramifié n'affecte pas l'identité à prouver, donc le résultat est vrai dans le cas où σ est irréductible.

Enfin, posons $\sigma = \sigma_1 \oplus \cdots \oplus \sigma_r$, où les σ_i sont irréductibles. Écrivons $d_i = \dim \sigma_i$. On a donc

$$\varepsilon(\sigma \otimes \check{\sigma}, \psi, s) = \prod_{i,j} \varepsilon(\sigma_i \otimes \check{\sigma}_j, \psi, s)$$

et, par [**16**, 3.6.8],

$$\varepsilon(\sigma_i \otimes \check{\sigma}_j, \psi, s)\,\varepsilon(\sigma_j \otimes \check{\sigma}_i, \psi, 1-s) = \det \sigma_i \otimes \check{\sigma}_j(-1).$$

De plus,

$$\det \sigma_i \otimes \check{\sigma}_j = (\det \sigma_i)^{d_j} (\det \sigma_j)^{-d_i},$$
$$\varepsilon(\sigma_i \otimes \check{\sigma}_i, \psi, \tfrac{1}{2}) = \det \sigma_i(-1)^{d_i - 1},$$

et le théorème suit d'un calcul facile.

3. *Cas d'une représentation de* $\mathrm{GL}_n(F)$

3.1. Dans ce dernier paragraphe, nous traitons le cas de $\mathrm{GL}_n(F)$.

THÉORÈME 2. *Soit $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$. On a*

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \omega_\pi(-1)^{n-1}.$$

La représentation π peut s'écrire, par la classification de Langlands, comme quotient de Langlands de l'induite parabolique d'une représentation essentiellement tempérée d'un sous-groupe de Levi de $\mathrm{GL}_n(F)$. Écrivons ce sous-groupe de Levi comme produit des $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, $i = 1, \ldots, r$, avec $\sum n_i = n$, et notons $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ la représentation induisante. Par [**10**, §9.4 et Theorem 3.1], si π est générique, ou par définition dans le cas général, on a

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, s) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{r} \varepsilon(\pi_i \times \check{\pi}_j, \psi, s).$$

Mais pour $i \neq j$ on a, par l'équation fonctionnelle des fonctions L,

$$\varepsilon(\pi_i \times \check{\pi}_j, \psi, s)\,\varepsilon(\check{\pi}_i \times \pi_j, \psi, 1-s) = \omega_{\pi_i}^{n_j} \omega_{\pi_j}^{n_i}(-1),$$

ce qui entraîne

$$\prod_{i<j} \varepsilon(\pi_i \times \check{\pi}_j, \psi, \tfrac{1}{2})\,\varepsilon(\pi_j \times \check{\pi}_i, \psi, \tfrac{1}{2}) = \prod_i \omega_{\pi_i}^{n-n_i}(-1).$$

Si on connaît le théorème pour chacun des π_i, on a

$$\varepsilon(\pi_i \times \check{\pi}_i, \psi, \tfrac{1}{2}) = \omega_{\pi_i}^{n_i - 1}(-1)$$

d'où

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \prod_i \omega_{\pi_i}^{n-1}(-1) = \omega_\pi^{n-1}(-1).$$

On est donc ramené au cas où π est essentiellement tempérée. Exactement de la même façon, en utilisant [**10**, Proposition 8.4 et Theorem 3.1], on se ramène au cas où π est essentiellement de carré intégrable.

Remarque. Le même usage que plus haut de l'équation fonctionnelle montre que $\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \frac{1}{2})^2 = 1$: nous sommes en train de calculer un signe.

3.2. Il est commode de se ramener au cas plus particulier encore où π est supercuspidale. Supposons π essentiellement de carré intégrable; il existe donc un diviseur r de n et une représentation $\rho \in \mathcal{A}_F^0(n/r)$ telle que π soit isomorphe à l'unique quotient de la représentation induite parabolique de $\rho \otimes \rho| \;| \otimes \cdots \rho| \;|^{r-1}$. Alors $\check{\pi}$ est isomorphe à l'unique quotient de la représentation induite parabolique de $\check{\rho}| \;|^{1-r} \otimes \cdots \otimes \check{\rho}$.

Posons

$$\gamma(\rho \times \check{\rho}, \psi, s) = \varepsilon(\rho \times \check{\rho}, \psi, s) \frac{L(\check{\rho} \times \rho, 1-s)}{L(\rho \times \check{\rho}, s)} \tag{3.2.1}$$

et définissons $\gamma(\pi \times \check{\pi}, \psi, s)$ de manière analogue. Rappelons qu'on a $L(\rho \times \check{\rho}, s) = L(\check{\rho} \times \rho, s)$ et $L(\pi \times \check{\pi}, s) = L(\check{\pi} \times \pi, s)$ [**10**, 2.12]. En outre on sait calculer

$$\gamma(\pi \times \check{\pi}, \psi, s) = \prod_{i,j=0}^{r-1} \gamma(\rho \times \check{\rho}, \psi, s + i - j) \tag{3.2.2}$$

[**10**, Theorem 3.1], et

$$L(\pi \times \check{\pi}, s) = \prod_{i=0}^{r-1} L(\rho \times \check{\rho}, s - r + 1 + 2i)$$

[**10**, Theorem 8.2]. Enfin, $L(\rho \times \check{\rho}, s)$ est le produit des $L(\chi, s)$ quand χ parcourt les caractères non ramifiés de $F^\times$ tels que $\chi\rho \cong \rho$ [**10**, Proposition 8.1]. En particulier aucun des facteurs L écrits plus haut n'a de zéro ni de pôle en $s = \frac{1}{2}$. On peut donc évaluer en $s = \frac{1}{2}$ et on obtient

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \gamma(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}),$$

et par (3.2.2),

$$\gamma(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \prod_{i,j=0}^{r-1} \gamma(\rho \times \check{\rho}, \psi, \tfrac{1}{2} + i - j).$$

La relation (3.2.1) (en $s = \frac{1}{2}$) donne

$$\prod_{i,j=0}^{r-1} \gamma(\rho \times \check{\rho}, \psi, \tfrac{1}{2} + i - j) = \prod_{i,j=0}^{r-1} \left(\varepsilon(\rho \times \check{\rho}, \psi, \tfrac{1}{2} + i - j) \frac{L(\check{\rho} \times \rho, \frac{1}{2} - i + j)}{L(\rho \times \check{\rho}, \frac{1}{2} + i - j)} \right)$$

et on a donc

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \prod_{i,j=0}^{r-1} \varepsilon(\rho \times \check{\rho}, \psi, \tfrac{1}{2} + i - j).$$

Comme le facteur epsilon de $\rho \times \check{\rho}$ est un monôme en q^{-s}, on obtient

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \varepsilon(\rho \times \check{\rho}, \psi, \tfrac{1}{2})^{r^2}.$$

Si on sait $\varepsilon(\rho \times \check{\rho}, \psi, \frac{1}{2}) = \omega_\rho(-1)^{n/r-1}$, on obtient

$$\varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \omega_\rho(-1)^{r(n-r)}.$$

De plus on $\omega_\pi(-1) = \omega_\rho(-1)^r$; si r est pair, on a donc $\varepsilon(\pi\times\check{\pi}, \psi, \frac{1}{2}) = 1 = \omega_\pi(-1)^{n-1}$; si r est impair, on a

$$\varepsilon(\pi\times\check{\pi}, \psi, \tfrac{1}{2}) = \omega_\pi(-1)^{n-r} = \omega_\pi(-1)^{n-1}.$$

On pourra donc supposer dans la suite que π est *supercuspidale*. En tordant par un quasicaractère non ramifié, ce qui n'affecte pas le facteur epsilon à calculer, on peut en outre supposer que π est *unitaire*.

3.3. Supposons seulement pour l'instant que $\pi \in \mathcal{A}_F(n)$ est générique et unitaire. Il nous faut rappeler les constructions de [**10**].

On note G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$, N le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures unipotentes. On définit un caractère $\theta = \theta_\psi$ de N par la formule

$$\theta(x) = \psi(x_{12} + x_{23} + \cdots + x_{n-1,n}), \quad x \in N.$$

On note $\mathcal{W}(\pi;\psi)$ l'espace des fonctions de Whittaker pour π, relatives au caractère θ; de même, on note $\mathcal{W}(\check{\pi};\overline{\psi})$ l'espace des fonctions Whittaker pour $\check{\pi}$, relatives au caractère conjugué $\overline{\theta}$. Notons w la matrice antidiagonale (w_{ij}), où

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j = n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À $W \in \mathcal{W}(\pi;\psi)$ associons la fonction $\widetilde{W} : g \mapsto W(w\,{}^tg^{-1})$; on obtient ainsi un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{W}(\pi;\psi)$ sur $\mathcal{W}(\check{\pi};\overline{\psi})$.

Notons η l'élément $(0,0,\ldots,0,1)$ de F^n et $\mathcal{S}(F^n)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur F^n. On dispose de l'application transformée de Fourier $\Phi \mapsto \hat{\Phi}$ de $\mathcal{S}(F^n)$ dans lui-même, définie par la formule

$$\hat{\Phi}(x) = \int_{F^n} \Phi(y)\,\psi(\mathrm{tr}({}^tyx))\,dy,$$

où l'intégration sur F^n est prise relativement à la mesure dy autoduale pour le caractère $(x,y) \mapsto \psi(\mathrm{tr}({}^tyx))$.

Pour $W \in \mathcal{W}(\pi;\psi)$ et $W' \in \mathcal{W}(\check{\pi};\overline{\psi})$, et $\Phi \in \mathcal{S}(F^n)$, on pose

$$\Psi(s, W, W'; \Phi) = \int_{N\backslash G} W(g)\,W'(g)\,\Phi(\eta g)\,|\det g|^s\,dg,$$

où la valeur absolue est la valeur absolue normalisée de F et où dg est une mesure invariante sur $N \setminus G$.

Par [**10**, Theorem 2.7], chacune des intégrales $\Psi(s, W, W'; \Phi)$ converge absolument pour s de partie réelle assez grande et définit une fonction rationnelle en q^{-s}, qu'on note de la même façon. On a l'équation fonctionnelle

$$\frac{\Psi(1-s, \widetilde{W}, \widetilde{W'}; \hat{\Phi})}{L(\check{\pi}\times\pi, 1-s)} = \omega_{\check{\pi}}(-1)^{n-1}\,\varepsilon(\pi\times\check{\pi}, \psi, s)\,\frac{\Psi(s, W, W'; \Phi)}{L(\pi\times\check{\pi}, s)}$$

où, comme on l'a déjà rappelé, $L(\pi\times\check{\pi}, s) = L(s, \check{\pi}\times\pi, s)$.

3.4. Comme $\omega_{\check{\pi}} = \omega_\pi^{-1}$, on ne restreint pas la généralité en supposant que $n(\psi) = 0$, i.e. ψ est trivial sur l'anneau des entiers $\mathfrak{o}_F$ de F, mais pas sur $\mathfrak{p}_F^{-1}$, $\mathfrak{p}_F$ désignant l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$. Nous prendrons pour W, dans l'équation fonctionnelle précédente, le vecteur essentiel de [**9**]. Si r est l'exposant du conducteur de π, c'est l'unique vecteur W de $\mathcal{W}(\pi;\psi)$ qui soit fixé par le groupe K_r des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}_F)$ dont la dernière ligne est congrue à η mod $\mathfrak{p}_F^r$, et qui vérifie $W(1) = 1$ (cf. [**1**, 4.3, Proposition 1]). Nous prendrons pour W' la fonction $\overline{W} : g \mapsto \overline{W(g)}$: comme π est unitaire, $\check{\pi}$ est isomorphe à la conjuguée complexe $\overline{\pi}$ de π, et il est immédiat que $\overline{W}$ est le vecteur essentiel pour $\overline{\pi}$. Pour Φ nous prendrons la fonction caractéristique de $\mathfrak{o}_F \times \cdots \times \mathfrak{o}_F$.

3.5. Pour $g = 1$, on a $\Phi(\eta g) = 1$ et $W(g) = 1$. Il s'ensuit que si on voit $\Psi(s, W, W'; \Phi)$ comme une série de Laurent formelle $Z(T)$ en $T = q^{-s}$ alors $Z(T)$ est une série de Laurent formelle non nulle, dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.

De façon analogue, la fonction $\hat{\Phi} = \Phi$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, et on a $\widetilde{W}'(g) = \overline{\widetilde{W}(g)}$ pour $g \in G$. Il s'ensuit que $\Psi(s, \widetilde{W}, \widetilde{W}'; \hat{\Phi})$ est une série de Laurent formelle $\widetilde{Z}(T)$, dont tous les coefficients sont des nombres réels positifs.

Faisons usage maintenant de l'hypothèse que π est *supercuspidale*; en ce cas nous avons dit plus haut que $L(\pi \times \check{\pi}, s)$ est le produit des $L(\chi, s)$ quand χ parcourt les caractères non ramifiés de $F^\times$ tels que $\chi\pi$ soit équivalente à π. S'il y a d tels caractères alors $L(\pi \times \check{\pi}, s)^{-1}$ correspond à $1 - T^d$. En fait pour un tel caractère χ, l'application $g \mapsto \chi(\det g) W(g)$ est clairement le vecteur essentiel pour $\chi\pi$ et comme $\chi\pi$ est équivalente à π, on a $W(g) = 0$ si $\chi(\det g) \neq 1$. On en déduit que $Z(T)$ et $\widetilde{Z}(T)$ sont des séries de Laurent formelles en T^d.

3.6. Posons

$$Z(T) = \sum_{i=\alpha}^{\infty} z_i T^{di}$$

avec $z_i \geqslant 0$, $z_\alpha \neq 0$, et

$$(1 - T^d) Z(T) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i T^{di}$$

avec $a_\alpha = z_\alpha \neq 0$, $a_\beta \neq 0$. Posons aussi

$$\widetilde{Z}(T) = \sum_{i=\gamma}^{\infty} s_i T^{di}$$

avec $s_i \geqslant 0$, $s_\gamma \neq 0$, et

$$(1 - T^d) \widetilde{Z}(T) = \sum_{i=\gamma}^{\delta} b_i T^{di}$$

avec $b_\gamma = s_\gamma \neq 0$, $b_\delta \neq 0$. Posons encore $\omega = \omega_\pi(-1)^{n-1}$ et $\varepsilon = \varepsilon(\pi \times \check{\pi}, \psi, \frac{1}{2})$, et notons f l'exposant du conducteur d'Artin de π. L'équation fonctionnelle de 3.3 s'écrit alors

$$\sum_{i=\gamma}^{\delta} b_i \left(\frac{1}{qT} \right)^{di} = \omega\varepsilon \sqrt{q^f}\, T^f \sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i T^{di}.$$

On en déduit

$$-d\delta = f + d\alpha, \quad -d\gamma = f + d\beta, \quad \alpha + \delta = \beta + \gamma,$$

et pour $i = \alpha, \ldots, \beta$,

$$\omega\varepsilon \sqrt{q^f}\, a_i = b_{\alpha+\delta-i} q^{d(i-\alpha-\delta)}.$$

Mais on a $a_i = z_i - z_{i-1}$ pour $i = \alpha + 1, \ldots, \beta$, d'où

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i = z_\beta \geqslant 0.$$

D'autre part on calcule (en posant $s_{\gamma-1} = 0$)

$$\begin{aligned} \omega\varepsilon\sqrt{q^f}\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i = \sum_{j=\gamma}^{\delta} b_j q^{-dj} &= \sum_{j=\gamma}^{\delta}(s_j - s_{j-1})q^{-dj} \\ &= s_\delta q^{-d\delta} + \sum_{j=\gamma}^{\delta-1} s_j q^{-dj}(1 - q^{-d}). \end{aligned}$$

On en déduit que $\omega\varepsilon \sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i$ est strictement positif, ce qui entraîne que $\omega\varepsilon$ l'est aussi. Comme $\omega^2 = \varepsilon^2 = 1$, on a $\omega = \varepsilon$.

Cela termine la preuve du Théorème 2.

References

1. C. J. Bushnell and G. Henniart, 'An upper bound on conductors for pairs', *J. Number Theory* 63 (1997) 183–196.

2. C. J. Bushnell and G. Henniart, 'Local tame lifting for GL_n II: wildly ramified supercuspidals', *Astérisque*, to appear.

3. C. J. Bushnell, G. Henniart and P. C. Kutzko, 'Local Rankin–Selberg convolutions for GL_n: explicit conductor formula', *J. Amer. Math. Soc.* 11 (1998) 703–730.

4. C. J. Bushnell, G. Henniart and P. C. Kutzko, 'Correspondance de Langlands locale pour GL_n et conducteurs de paires', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 31 (1998) 537–560.

5. P. Deligne, 'Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale', *Invent. Math.* 35 (1976) 299–316.

6. M. Harris, 'Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half-spaces; elaboration of Carayol's program', *Invent. Math.* 129 (1997) 75–120.

7. M. Harris, 'The local Langlands conjecture for $GL(n)$ over a p-adic field, $n < p$', *Invent. Math.* 134 (1998) 177–210.

8. G. Henniart, 'La conjecture locale de Langlands pour $GL(n)$', *Astérisque* 94 (1982) 67–85.

9. H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro and J. A. Shalika, 'Conducteur des représentations du groupe linéaire', *Math. Ann.* 236 (1981) 199–214.

10. H. Jacquet, I. I. Piatetskii-Shapiro and J. A. Shalika, 'Rankin–Selberg convolutions', *Amer. J. Math.* 105 (1983) 367–483.

11. S. Kudla, 'The local Langlands correspondence: the non-Archimedean case', *Proceedings of the Summer Research Conference on Motives*, Proc. Sympos. Pure Math. 55 (ed. U. Janssen, S. Kleiman and J.-P. Serre, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994) 365–391.

12. R. P. Langlands, 'Problems in the theory of automorphic forms', *Lectures in modern analysis and applications III*, Lecture Notes in Math. 170 (Springer, Berlin, 1970) 18–86.

13. G. Laumon, M. Rapoport and U. Stuhler, '$\mathscr{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence', *Invent. Math.* 113 (1993) 217–338.

14. F. Shahidi, 'On certain L-functions', *Amer. J. Math.* 103 (1981) 297–355.

15. F. Shahidi, 'Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $GL(n)$', *Amer. J. Math.* 106 (1984) 67–111.

16. J. Tate, 'Number theoretic background', *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math. 33, part 2 (ed. A. Borel and W. Casselman, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979) 3–22.

17. A. V. Zelevinsky, 'Induced representations of reductive p-adic groups II: on irreducible representations of $GL(n)$', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 13 (1980) 165–210.

Department of Mathematics
King's College
Strand
London WC2R 2LS

URA 752 du CNRS
Université de Paris-Sud
91405 Orsay cedex
France